

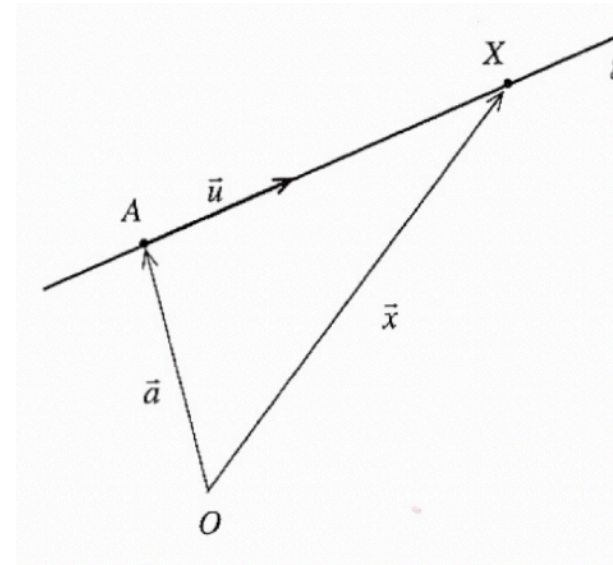
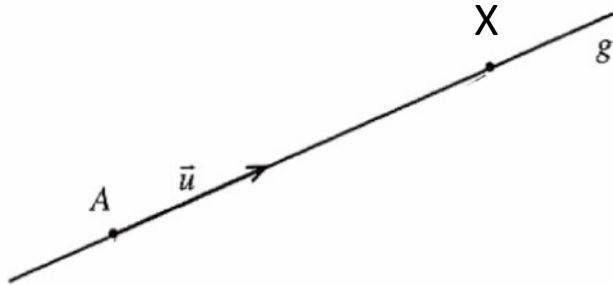
Instruktion

Geraden im Raum



Gleichungen von Geraden

Die Flugbahn eines Flugzeugs kann durch eine Gerade g , die durch einen Punkt A und eine Richtung $\vec{u}$ festgelegt ist, beschrieben werden.



Für jeden weiteren Punkt X der Geraden g gilt dann: $\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$ $\vec{AX} = \lambda \cdot \vec{u}$

(1) Punkt-Richtungs-Form der Geraden:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$$

Die Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Parametergleichung der Geraden g . Der Ortsvektor $\vec{a}$ zum Aufhängepunkt A heißt Stützvektor, der Vektor $\vec{u}$ Richtungsvektor der Geraden.

(2) Zwei-Punkte-Form der Geraden:

Eine Gerade ist auch durch die Angabe zweier verschiedener Punkte A und B eindeutig festgelegt. Der Richtungsvektor der Geraden g kann z.B. durch den Vektor $\overrightarrow{AB}$ bestimmt werden.

Schreibweise: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

Stellen Sie die vektorielle Gleichung einer Geraden g auf, die durch die Punkte A(-7/3/4) und B(2/-8/5) festgelegt ist.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Aufstellen einer Geraden g
durch zwei Punkte

Sie die Koordinaten der Punkte A und B ein, d

A2 1
 A3 1
 B1 -1

Besondere Geraden

(a) Ursprungsgeraden:

$$\text{Einfachste Form: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \vec{u} \quad \text{zum Beispiel: } g: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Auch möglich: wähle statt (0/0/0) als Aufhängepunkt einen Punkt, der auf g liegt

$$\text{zum Beispiel } P(2/-4/6) \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Folgerung:

Bei Ursprungsgeraden sind die Koordinaten des Aufhängepunktes ein Vielfaches des Richtungsvektors.

(b) Gleichungen der Koordinatenachsen:

$$x_1\text{-Achse: } \vec{g:\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{g:\vec{x}} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2\text{-Achse: } \vec{g:\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{g:\vec{x}} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3\text{-Achse: } \vec{g:\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{g:\vec{x}} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Neue Aufgabe

Gleichung der Geraden g lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$

ist parallel zur x_1 -Achse

g ist echt

Falsch

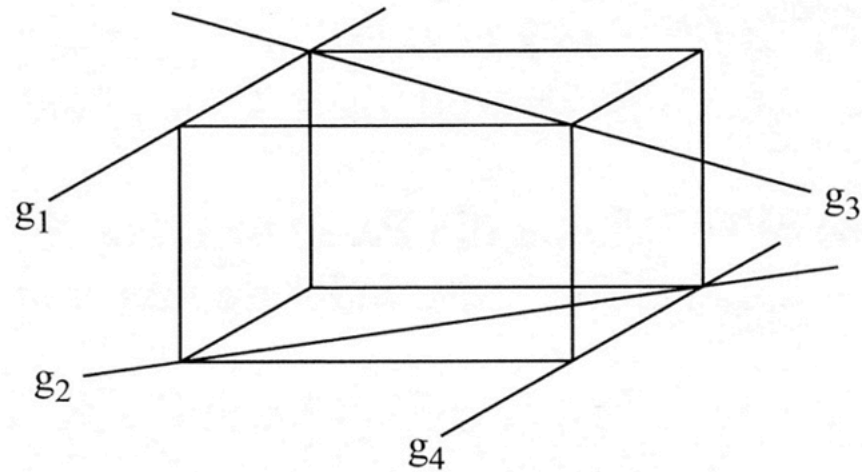
Wahr

Lage eines Punktes bezüglich einer Geraden:

Prüfen Sie, ob der Punkt P(1/-4/3) auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegt.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 1 = 2 + k \\ \text{(II)} & -4 = -1 + 3k \\ \text{(III)} & 3 = 5 - 2k \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} k = -1 & \\ k = -1 & \\ k = 1 & \end{array} \quad \Rightarrow P \notin g$$

Lagebeziehung von Geraden



parallele Geraden: g_1 und g_4

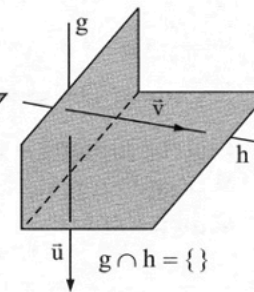
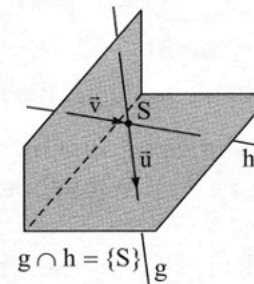
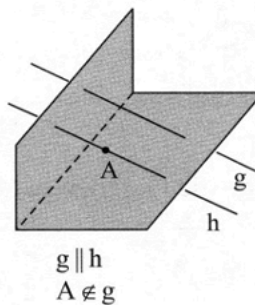
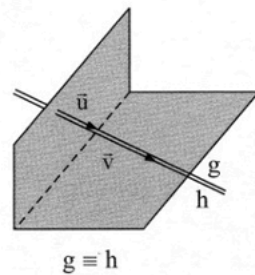
sich schneidende Geraden: g_1 und g_3 ; g_2 und g_4

windschiefe Geraden: g_1 und g_2 ; g_2 und g_3 ; g_3 und g_4

Strategie zum Bestimmen der gegenseitigen Lage zweier Geraden im Raum

$$g: \vec{x} = \vec{p}_1 + k \cdot \vec{u} \quad \text{bzw.}$$

$$h: \vec{x} = \vec{p}_2 + r \cdot \vec{v} \quad \text{mit } k, r \in \mathbb{R}$$



Beispiele:

1 Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$ und der

Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$

Prüfen, ob die Richtungsvektoren linear unabhängig sind: $a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ linear unabhängig $\Rightarrow g$ und h schneiden sich oder sind windschief

Gleichsetzen der Geradengleichungen g und h : $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(I) \Rightarrow k = \frac{3}{2}$ $(II) \Rightarrow t = -1$
 k und t in (III): $\frac{3}{2} = 4 - (-1) \Rightarrow \frac{3}{2} = 5$

$\Rightarrow g$ und h sind windschief

2 Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$ und der

$$\text{Geraden } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Richtungsvektoren von g und h sind linear abhängig, also sind g und h parallel oder identisch.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(III)} \Rightarrow 0 = 5 \quad \Rightarrow (3/2/0) \notin h$$

$\Rightarrow g$ und h sind echt parallel

Geben Sie die Koordinaten des Aufhängepunktes

A1 A2 A3 u1

Geben Sie die Koordinaten des Aufhängepunktes

B1 B2 B3 v1

Die Gleichungen der Geraden g und h lauten :

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittwinkel zwischen zwei Geraden

Der Schnittwinkel φ zwischen zwei Geraden g und h der Ebene ($\mathbb{R}^2$) oder des Raumes ($\mathbb{R}^3$) kann mit Hilfe der beiden Richtungsvektoren $\vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ wie folgt berechnet werden:

$$\cos \varphi = \frac{\left| \vec{r}_g \circ \vec{r}_h \right|}{\left| \vec{r}_g \right| \cdot \left| \vec{r}_h \right|}$$

Beispiel:

Bestimmen Sie den Schnittwinkel φ der beiden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -15 + 18 - 21 = -18 \quad \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-7)^2} = \sqrt{94} \quad \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{43}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{|-18|}{\sqrt{94} \cdot \sqrt{43}} \approx 0,2831 \Rightarrow \varphi \approx 73,55^\circ$$